OM EN KLASS HELA FUNKTIONER AF IRREGULÄR TILLVÄXT.

AF

RUBEN MATTSON.

MED en hel funktion af irregulär tillväxt menas som bekant en hel funktion, hvilkens maximimodyl $M(r)$ för $|x| = r$ företer sådana oregelbundenheter, att dess värde för vissa argumentvärden är jämförligt med e^{r^α} och för andra med e^{r^β}, där α och β äro tvenne skilda konstanter eller tvenne olika hastigt växande funktioner af r. För att bilda en hel funktion af denna natur har man tvenne direkta metoder, båda angifna af *Borel*[1]). Man kan antingen bilda en beständigt konvergerande potensserie med luckor mellan termerna d. v. s. en serie af formen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^{n_\nu},$$

eller också kan man bilda en s. k. kanonisk produkt med användande af en serie nollställen, hvilkas absoluta belopp tillväxa på ett oregelbundet sätt. Den förra metoden har varit den hittills hufvudsakligen använda (*Borel*[2]), *Blumenthal*[3])). För att studera sambandet mellan en irregulär funktions storleksordning och dess serie af nollställen bör emellertid den andra metoden ligga närmare till hands. Ämnet för den undersökning, som här skall refereras, är just att gifva några enkla exempel på hela funktioner af irregulär tillväxt, hvilkas nollställen på förhand äro uppgifna.

[1]) Leçons sur les fonctions entières. Paris 1900. pag. 120 och 21.

[2]) Sur quelques fonctions entières. Rend. del. Circ. mat. di Palermo. T. XXIII.

[3]) Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini. Paris 1910. pag. 8.

Det följer omedelbart af den allmänna teorien för hela funktioner af ändlig ordning, hvilka villkor nollställena måste uppfylla för att funktionens tillväxt skall blifva irregulär. Skrifver man nämligen $M(r)$ under formen

$$M(r) = e^{\tau(r) r^{\rho}},$$

där ρ betecknar funktionens apparenta ordning, är tydligt, att $M(r)$ blir af irregulär tillväxt i den här afsedda meningen, endast om $\tau(r)$ i ett oändligt antal intervall antar oändligt små värden och i ett annat också oändligt antal intervall antar ändliga eller oändligt växande värden. Man får häraf omedelbart[1]) följande *nödvändiga* villkor för att funktionen $F(x)$ skall vara af irregulär tillväxt:

Om ρ *ej är ett helt tal*, *måste* $\lim\limits_{n=\infty} \inf \dfrac{n}{|a_n|^{\rho}}$ *vara* $= 0$; *om* ρ *är ett helt tal, måste samma villkor vara uppfylldt*, *men då måste man därjämte ha* $\lim\limits_{n=\infty} \inf \sum\limits_{1}^{n} \dfrac{1}{a_{\nu}^{\rho}} = 0$.

Det första af båda dessa villkor är tydligen uppfylldt för funktionen

$$F_1(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(E_p \left(\frac{x}{k^{\frac{k^{\nu}}{\rho}}} \right) \right)^{k^{k^{\nu}}},$$

där E_p betyder den Weierstrassiska primfaktorn af rangen $p = [\rho]$ och k är ett helt positivt tal hv. s. h. Funktionen har nämligen följande serie af nollställen:

$$\underbrace{k^{\frac{k}{\rho}} \cdots k^{\frac{k}{\rho}}}_{(k^k \text{ st.})}; \quad \underbrace{k^{\frac{k^2}{\rho}} \cdots k^{\frac{k^2}{\rho}}}_{(k^{k^2} \text{ st.})}; \quad \cdots\cdots$$

Nollställena a_m och a_{m+1} med

$$m = k^k + k^{k^2} + \cdots + k^{k^n} \quad (n = 1, 2 \cdots)$$

blifva alltså af storleksordningarne $m^{\frac{1}{\rho}}$ och $(m+1)^{\frac{k}{\rho}}$ resp.; $\dfrac{m+1}{|a_{m+1}|^{\rho}}$ antar alltså med växande n allt mindre värden, och vi skola nu uppvisa,

---

[1]) Jmf. *Lindelöf*: Sur les fonctions entières d'ordre entier. Annales sc. de l'École Normale. 3e sér. T. XXII. p. 375. Det erbjuder inga svårigheter att formulera de anförda villkoren så, att de äfven blifva tillräckliga.

att funktionen $F_1(x)$ är af irregulär tillväxt för $\rho > p$ och af regulär tillväxt för $\rho = p$.

För att undersöka funktionens storleksordning utgå vi från följande resultat angående funktionen $E_p(u)$: s maximimodyl på cirkeln $u = |u|$.

$$|E_p(u)|_{\max} = (|u| - 1)\, e^{|u| + \frac{|u|^2}{2} + \cdots \frac{|u|^p}{p}} \qquad \text{för } |u| \geqq 1 + \frac{1}{p}$$

$$\leqq e^{\frac{p}{p+1}|u|^{p+1}} \qquad |u| < 1 + \frac{1}{p}.$$

I fallet $p < \rho < p + 1$ får man häraf utan svårighet

$$(1) \qquad |F_1(x)| \leqq e^{(1+\varepsilon(r))\left(\frac{1}{p} r^{p + \frac{\rho - p}{k^\theta}} + \frac{p}{p+1} r^{p+1-(p+1-\rho)k^{1-\theta}}\right)}$$

idet vi med $\varepsilon(r)$ beteckna[1]) en funktion tenderande mot 0 med $\frac{1}{r}$ och med θ mena ett positivt tal $\leqq 1$ bestämdt så att

$$r^\rho = k^{k^{n+\theta}}$$

om

$$(2) \qquad n = \left[\frac{\log_2(r^\rho) - \log_2 k}{\log k}\right].$$

Det följer af (1), att den mot $F_1(x)$ svarande funktionen $M_1(r)$ har sin storleksordning varierande mellan

$$e^{r^\rho} \text{ och } e^{r^{p + \frac{1}{1 + k^{\frac{p+1-\rho}{\rho - p}}}}},$$

den första svarande mot $\theta = 0$ eller 1, den senare mot det θ-värde, som gör de båda termerna i exponenten i (1) lika. För $\rho = p$ medför detta tydligen icke någon variation alls i funktions storleksordning. Man får i detta fall direkt

$$M_1(r) = e^{(1+\varepsilon(r))\, r^p \cdot n},$$

där n är bestämdt af (2), d. v. s. för alla r-värden är $M_1(r)$ jämförligt med:

$$e^{\frac{r^p \log_2 r}{\log k}}$$

och oaktadt $F_1(x)$ har irregulärt fördelade nollställen ha alla funktiotionerna

---

[1]) samma betydelse har $\varepsilon(r)$ öfverallt i det följande.

$$\varphi(x) \cdot F_1(x) + \psi(x)$$

[$\varphi(x)$ och $\psi(x)$ hela funktioner af lägre ordning än p] regulär nollställesfördelning med

$$|a_n| \sim \left(\frac{n}{\log_2 n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

För att en funktion med heltalsordning skall vara irregulär fordras som nämndt, att man skall hafva

$$\lim_{n=\infty} \inf \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{a_\nu^p} = 0.$$

Det är då tydligt, att irregulariteten kommer att bli så stor som möjligt, om man därjämte har

$$\sum_{\nu=1}^{n_\mu} \frac{1}{a_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \frac{1}{a_\nu^2} = \cdots \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \frac{1}{a_\nu^p} \quad (\mu = 1, 2, 3 \cdots), \tag{3}$$

där $n_1, n_2, n_3, \cdots$ utgöra en ständigt växande serie hela tal.

Alla dessa villkor äro tydligen uppfyllda för funktionen

$$F_2(x) = \prod_{\nu=\nu_0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k^{\frac{k^\nu}{\rho}}}\right)^{k^{k^\nu}}\right) \quad (k^{k^{\nu_0}} > p)$$

och denna funktions irregularitet blir därför mycket större än den nyss behandlade funktionens.

Beräkningen af $M(r)$ är här synnerligen enkel, i det att man har, om $M_2(r)$ är den mot $F_2(x)$ svarande funktionen $M(r)$,

$$\frac{r^m}{|a_1 a_2 \cdots a_m|} < M_2(r) < C \frac{r^m}{|a_1 a_2 \cdots a_m|}, \tag{4}$$

där C är en viss konstant och m är bestämdt så att

$$|a_m| \leqq r < |a_{m+1}|.$$

Med samma beteckningar som för $F_1(x)$ får man alltså:

$$M_2(r) = r^{(1+\varepsilon(r))\left\{(1-k^{-\theta}) r^{\rho \cdot k^{-\theta}} + (1-k^{-1-\theta}) r^{\rho \cdot k^{-\theta-1}}\right\}}.$$

Sätter man här

$$1 - k^{-\theta} = \varkappa$$

och således

$$\theta = \frac{\log\left(\frac{1}{1-\varkappa}\right)}{\log k}$$

får man

$$M_2(r) = r^{(1+\varepsilon(r))\left\{\varkappa r^{\rho(1-\varkappa)} + \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{\varkappa}{k}\right) r^{\frac{\rho}{k}(1-\varkappa)}\right\}}$$

hvaraf det omedelbart synes, att $M_2(r)$ har sin storleksordning växlande mellan $r^{r^{\frac{\rho}{k}}}$ och $r^{r^{\rho-\eta(r)}}$, där $\lim_{r=\infty} \eta(r) = 0$. Genom att taga k tillräckligt stort kan man alltså få $M_2(r)$ att variera mellan $e^{r^{\delta}}$ och $e^{r^{\rho}}$, hur litet än det positiva talet δ väljes.

Ännu större irregularitet fås genom att bilda funktionerna med nollställena: $k^{k^{k^{\nu}}}$ $(\nu = 1, 2, 3 \cdots\cdot)$. Man får t. ex. att funktionen

$$F_3(x) = \prod_{\nu=\nu_0}^{\infty} \left\{1 - \left(\frac{x}{\left(k^{k^{\nu}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}\right)^{k^{k^{\nu}}}\right\} \qquad \left(k^{k^{\nu_0}} > p\right)$$

är af ordningen ρ, men dess storleksordning är i en oändlig mängd intervall

$$r^{k^{(1-\varepsilon(r))}\left(k \log(r^{\rho})\right)^{\frac{1}{k}}}$$

d. v. s. funktionen förhåller sig i dessa intervall som en funktion af ordningen 0.

Funktionen

$$F_4(x) = \prod_{\nu=\nu_0}^{\infty} \left\{1 - \left(\frac{x}{\left(k^{k^{\nu}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}\right)^{k^{k^{\nu+1}}}\right\}$$

är däremot af oändlig ordning och man har för ett oändligt antal r-värden växande mot oändligheten

$$M(r) = r^{r^{\rho}\left[\left(k \log(r^{\rho})\right)^{k^{1-\varepsilon(r)}} - 1\right]}$$

medan

$$M(r) = r^{r^{\rho - \varepsilon(r)}}$$

för

$$r = k^{k^{k^n}} \quad n > n_0.$$

Ännu större irregularitet erhålles naturligtvis för funktioner, hvilkas nollställen äro bildade med tillhjälp af ännu flere gånger itererade exponentialfunktioner.

De funktioner, som fås på detta sätt kunna alla skrifvas under formen

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{b_\nu} \right)^{m_\nu} \right)$$

där $|b_1| < |b_2| < |b_3| \cdots$ och $\lim\limits_{\nu=\infty} |b_\nu| = \infty$ samt där $m_1, m_2, m_3, \cdots$ äro hela tal hv. s. h. görande den anförda produkten konvergent. Af alla funktioner med samma modyler hos nollställena är tydligen tillväxten mest irregulär hos en sådan funktion och ett närmare studium af den mot densamma svarande funktionen $M(r)$ bör därför kunna lämna bidrag till lösningen af problemet att utfinna, huru en växande funktion kan vara beskaffad för att den skall kunna vara lika med maximimodylen till en hel funktion.